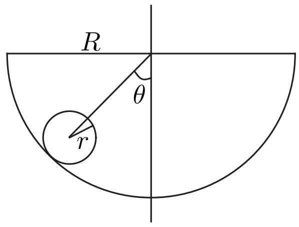
به نامِ خدا

امتحانِ میان‌ترمِ مکانیکِ تحلیلی II دانش‌گاهِ الزهرا- اردیبهشتِ ۱۳۹۴

مسئله‌یِ ۱) گلوله ای به شعاعِ r درونِ کره‌یِ توخالیِ ثابتی به شعاعِ R می‌غلتد. لاگرانژیِ بر حسب $\theta, \dot\theta$ چیست؟ $I_{\rm cm}$ لختیِ دورانی کره‌یِ کوچک نسبت به مرکزش است.



انرژیِ پتانسیلِ گلوله $-mg(R-r)\cos\theta$ است. انرژیِ جنبشیِ گلوله دو بخش دارد: یکی انرژیِ جنبشیِ انتقالی مربوط به مرکزِ جرمِ گلوله K_1 و دیگری انرژیِ جنبشیِ دورانِ گلوله حولِ مرکزِ جرمش، K_2. سرعتِ خطیِ مرکزِ گلوله $(R-r)\dot\theta$ است. اما چون حرکتِ گلوله غلتشِ محض است، سرعتِ زاویه‌ایِ دورانِ گلوله از تقسیمِ سرعتِ خطیِ مرکزِ گلوله بر شعاعِ گلوله به دست می‌آید، یعنی $\omega = (R-r)\dot\theta/r$. بنا بر این

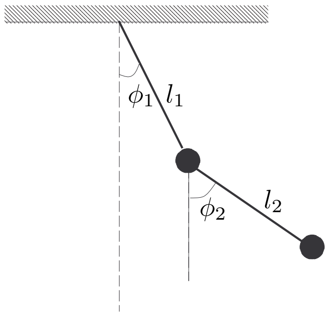
$$K_1 = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot\theta^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2}I_{\rm cm}\omega^2 = \frac{1}{2}I_{\rm cm}\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot\theta^2$$

بنا بر این لاگرانژیِ این سیستم عبارت است از

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}I_{\rm cm}\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot\theta^2 + mg(R-r)\cos\theta$$

مسئله‌یِ ۲) آونگی دوتایی مطابقِ شکل در نظر بگیرید. لاگرانژیِ آن چیست؟



انرژیِ جنبشیِ ذره‌یِ اول عبارت است از

$$K_1 = \frac{m}{2} m l_1^2 \dot{\phi}_1^2 \qquad (۱)$$

برایِ به دست آوردنِ انرژیِ جنبشیِ ذره‌یِ دوم ابتدا بردارِ مکانِ آن را می‌نویسیم و از آن‌جا با مشتق‌گیری از بردارِ مکانِ ذره‌یِ دوم سرعتِ آن را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (l_1 \sin\phi_1 + l_2 \sin\phi_2)\mathbf{i} + (l_1 \cos\phi_1 + l_2 \cos\phi_2)\mathbf{j} \\ \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{r}} &= (l_1 \dot{\phi}_1 \cos\phi_1 + l_2 \dot{\phi}_2 \cos\phi_2)\mathbf{i} - (l_1 \dot{\phi}_1 \sin\phi_1 + l_2 \dot{\phi}_2 \sin\phi_2)\mathbf{j}. \end{aligned} \qquad (۲)$$

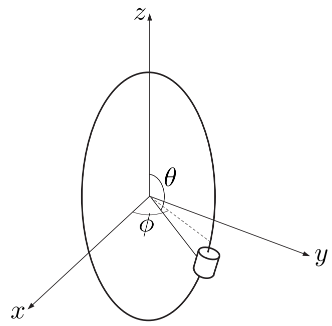
حالا می‌توانیم انرژیِ جنبشیِ ذره‌یِ دوم را بنویسیم.

$$K_2 = \frac{m}{2} \left(l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \right) \qquad (۳)$$

انرژیِ پتانسیلِ ذره‌یِ اول $V_1 = -mgl_1 \cos\phi_1$ و انرژیِ پتانسیلِ ذره‌یِ دوم $V_1 = -(mgl_1 \cos\phi_1 + mgl_2 \cos\phi_2)$ است. بنا بر این لاگرانژیِ این سیستم عبارت است از

$$\mathcal{L} = m l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} m l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + m l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + 2mgl_1 \cos\phi_1 + mgl_2 \cos\phi_2$$

مسئله‌یِ ۳) الف- دانه‌یِ تسبیحی به جرمِ m بر رویِ حلقه‌ای به شعاعِ a و اصطکاکِ ناچیز می‌لغزد. حلقه در صفحه‌یِ قائمی قرار گرفته است و آزادانه حولِ محورِ z دوران می‌کند. لاگرانژیِ آن بر حسبِ $\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ چیست؟ (ϕ زاویه‌یِ سمتیِ جرمِ m است.)



ب- اگر حلقه را با سرعتِ زاویه‌ایِ ثابتِ ω بچرخانیم لاگرانژیِ آن بر حسب $\theta, \dot{\theta}$ چیست؟

انرژیِ جنبشیِ یک ذره در مختصاتِ کروی

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2). \qquad (۴)$$

چون ذره مقید است رویِ حلقه‌ای به شعاعِ $r = a$ حرکت کند، انرژیِ جنبشی به صورتِ زیر در می‌آید

$$K = \frac{1}{2}m(a^2\dot{\theta}^2 + a^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2). \qquad (۵)$$

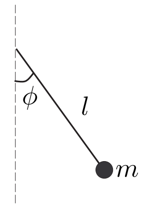
انرژیِ پتانسیلِ دانه‌یِ تسبیح هم $V = mga\cos\theta$ است. پس لاگرانژی عبارت است از

$$L = \frac{1}{2}ma^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) - mga\cos\theta. \qquad (۶)$$

ب- اگر حلقه را با سرعتِ زاویه‌ایِ ثابتِ ω بچرخانیم، لاگرانژیِ آن بر حسب $\theta, \dot{\theta}$ عبارت است از

$$L = \frac{1}{2}ma^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta) - mga\cos\theta. \qquad (۷)$$

مسئله‌یِ ۴) نقطه‌یِ آویزِ آونگِ ساده‌ای با دامنه‌یِ $a\cos\omega t$ در راستایِ قائم نوسان می‌کند. لاگرانژی رابر حسب $\phi, \dot{\phi}$ به دست آورید. ϕ زاویه‌ی آونگ با محور قائم است.



بردارِ مکانِ جسم عبارت است از

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}\, l \sin\phi + \mathbf{j}\,(l\cos\phi + a\cos\omega t),$$

و بردارِ سرعتِ آن عبارت است از

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{i}\, l\dot{\phi}\, \cos\phi + \mathbf{j}\,(\,-l\dot{\phi}\sin\phi - a\omega\sin\omega t).$$

بنا بر این انرژیِ جنبشیِ آونگ می‌شود

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\phi}^2 + a^2\omega^2\sin^2\omega t + 2al\omega\dot{\phi}\sin\omega t\sin\phi)$$

لاگرانژیِ سیستم عبارت است از

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\phi}^2 + a^2\omega^2\sin^2\omega t + 2al\omega\dot{\phi}\sin\omega t\sin\phi) + mg(l\cos\phi + a\cos\omega t)$$

در کلاس نشان خواهیم داد که جمله‌هایی در لاگرانژی که مشتقِ کاملِ زمانی هستند هیچ اثری در معادله‌ی حرکت ندارند و می‌توان آن‌ها را از معادله‌ی حرکت حذف کرد. پس لاگرانژیِ زیر نیز معادله حرکتی مشابهِ لاگرانژی قبلی می‌دهد.

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\phi}^2 + 2al\omega\dot{\phi}\sin\omega t\sin\phi) + mgl\cos\phi$$

مسئله‌یِ ۵) جسمی را از بالایِ برجی به ارتفاعِ h رها می‌کنیم. می‌خواهیم ببینیم وقتی این جسم به زمین می‌خورد نیرویِ کوریولیس چه‌قدر باعثِ انحرافِ جسم از راستایِ شاقول شده.

الف- برایِ جسمی که از این برج سقوط می‌کند نسبتِ نیرویِ کوریولیس به نیرویِ وزن، از چه رتبه‌ای است؟ فرض کنید که برج در استوا است و ارتفاعش ۳۰۰ متر است.

ب- تا اولین مرتبه تقریب نسبت به سرعتِ زاویه‌ایِ زمین، وقتی این جسم با زمین برخورد می‌کند محل برخورد جسم با زمین چه‌قدر جابه‌جا شده است؟

الف- نیروی کوریولیس یک نیروی مجازی است که به‌خاطرِ نالخت بودنِ دستگاهِ دوّار برای تصحیحِ قانونِ نیوتن در نظر می‌گیریم. این نیرو $-2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$ است. سرعتِ زاویه‌ای زمین برابر است با

$$\omega = \frac{2\pi}{24\times 3600} \approx 7\times 10^{-5}. \qquad (۸)$$

جسمی از برجِ میلاد سقوط می‌کند. در غیابِ نیروی کوریولیس و نیروی مقاومتِ هوا سرعتِ آن در راستای z محورِ عمود بر سطحِ زمین است. اگر ارتفاعِ این برج را $300\,\mathrm{m}$ بگیریم، بیش‌ترین مقدارِ این سرعت $v=\sqrt{2gh}\approx 80\,\mathrm{m/s}$. فرض کنید عرضِ جغرافیاییِ تهران را تقریباً $\lambda\approx 36^\circ$ بگیریم. در این صورت نسبتِ نیروی کوریولیس به نیروی وزن برای جسمی که سقوط می‌کند تقریباً برابر است با

$$\frac{2m\omega v\cos\lambda}{mg} \approx \frac{2\times 7\times 10^{-5}\times 80}{10} \approx 10^{-3}. \qquad (۹)$$

پس نیروی کوریولیس حداقل 1000 برابر کوچک‌تر از نیروی وزن است. برای استوا $\lambda=0$ می‌گیریم.

ب- قانونِ نیوتن برای جسمِ در حالِ سقوط به صورتِ زیر است

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{k} - 2m\omega\mathbf{n}\times\mathbf{v}. \qquad (۱۰)$$

محورِ z را عمود بر سطحِ زمین، و محورِ x را در صفحه‌ای که از محورِ z و $\mathbf{n}$ می‌گذرد، می‌گیریم. شرایطِ اولیه‌ی مسئله هم $\mathbf{r}(0)=h\mathbf{k}$، و $\dot{\mathbf{r}}(0)=0$ است. حلِ دقیقِ این مسئله علی‌الاصول پیچیده است. در ضمن همان‌طور که در بندِ قبلِ سئوال هم دیدیم لازم هم نیست که سعی کنیم مسئله را دقیق حل کنیم. چون جمله‌ی اختلالیِ نیروی کوریولیس 1000 بار کوچک‌تر از وزن است، می‌توانیم مسئله را اختلالی حل کنیم. با جاگذاریِ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \omega\mathbf{r}_1 + \omega^2\mathbf{r}_2 + \cdots \qquad (۱۱)$$

در معادله‌ی نیوتن و شرایطِ اولیه نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
&\ddot{\mathbf{r}}_0 + \omega\ddot{\mathbf{r}}_1 + \cdots = -g\mathbf{k} - 2\omega\mathbf{n}\times(\dot{\mathbf{r}}_0 + \omega\dot{\mathbf{r}}_1 + \cdots),\\
&\mathbf{r}_0(0) + \omega\mathbf{r}_1(0) + \cdots = h\mathbf{k},\\
&\dot{\mathbf{r}}_0(0) + \omega\dot{\mathbf{r}}_1(0) + \cdots = 0.
\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

حالا باید جمله‌های هم‌رتبه در دو طرفِ رابطه را مساوی قرار دهیم

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}}_0 &= -g\mathbf{k}, & \mathbf{r}_0(0) &= h\mathbf{k} & \dot{\mathbf{r}}_0(0) &= 0\\
\ddot{\mathbf{r}}_1 &= -2\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{r}}_0, & \mathbf{r}_1(0) &= 0 & \dot{\mathbf{r}}_1(0) &= 0,
\end{aligned}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -2\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{r}}_1, \quad \mathbf{r}_2(0)=0 \quad \dot{\mathbf{r}}_2(0)=0,$$
$$\vdots$$

از حلِ معادله‌یِ اول نتیجه می‌شود

$$\mathbf{r}_0 = (-\frac{1}{2}gt^2 + h)\mathbf{k}. \tag{۱۳}$$

با جاگذاری‌یِ این مقدار معادله‌یِ مربوط به $\mathbf{r}_1$ به صورتِ زیر در می‌آید

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = 2gt\mathbf{n}\times\mathbf{k}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_1 = \frac{gt^3}{3}\mathbf{n}\times\mathbf{k}. \tag{۱۴}$$

اگر به همین صورت ادامه دهیم

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -2gt^2\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{k}), \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{gt^4}{6}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{k}). \tag{۱۵}$$

بنابراین $\mathbf{r}(t)$ می‌شود

$$\mathbf{r} = (-\frac{1}{2}gt^2 + h)\mathbf{k} + \frac{\omega g t^3}{3}\mathbf{n}\times\mathbf{k} - \frac{\omega^2 g t^4}{6}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{k}) + \cdots \tag{۱۶}$$

برایِ آن‌که انحرافِ از راستایِ شاقول را به دست آوریم لازم است ببینیم زمانِ سقوط چه‌قدر است. زمانِ سقوط را هم می‌توانیم اختلالی به دست آوریم. در این زمان $z=0$ است. پس

$$z = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = (-\frac{1}{2}gT^2 + h) - \frac{\omega^2 g T^4}{6}\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{k}) + \cdots = 0 \tag{۱۷}$$

در این حالت تغییرِ زمانِ سقوط از مرتبه‌یِ دوم است. اگر انحراف تا رتبه‌یِ اول را بخواهیم کافی است زمانِ سقوط تا رتبه‌یِ صفرم، $T_0 = \sqrt{2h/g}$، را جاگذاری کنیم. اگر ارتفاعِ برجِ میلاد را تقریباً $300\,\mathrm{m}$ بگیریم، انحرافِ مکانِ برخوردِ با زمین به خاطرِ نیروی‌ِ کوریولیس تقریباً برابر است با

$$\omega\mathbf{r}_1 = \omega\frac{g}{3}(\frac{2h}{g})^{3/2}\mathbf{n}\times\mathbf{k} = \frac{\omega}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\cos\lambda\,\mathbf{j} \approx 0.09\,\mathbf{j}. \tag{۱۸}$$

پس انحراف در رتبه‌یِ اول حدود $9\,\mathrm{cm}$ و در جهتِ محورِ y یعنی رو به شرق است. با توجه به این که جمله‌یِ رتبه‌یِ دوم هزار بار از جمله‌یِ رتبه‌یِ اول کوچک‌تر است، به راحتی می‌توانیم آن را دور بریزیم.
